Grundlegende Definitionen

Definition 1 *Ein (endlicher)* ***Graph G*** *ist ein Paar* ***(V(G), E(G))****.* ***V(G)*** *ist eine endliche nichtleere Menge von Knoten.* ***E(G)*** *ist eine Menge zweielementiger Teilmengen von V(G) welche Kanten in G repräsentieren.*

Definition 2 *Die Anzahl* ***p = |V(G)|*** *der Knoten von G heißt* ***Ordnung*** *von G.*

Definition 3 *Die Anzahl der zu einem Knoten v inzidenten Kanten* $\boldsymbol{d_G(v)}$ *heißt* ***Grad*** *des Knoten v.* $\boldsymbol{\Delta(G)}$ *bezeichnet den* ***maximalen Grad*** *aller Knoten von G.*

Definition 4 $\boldsymbol{K_p}$ *bezeichnet einen* ***vollständigen Graphen*** *der Ordnung p, in dem alle Knoten paarweise adjazent sind.*

Definition 5 $\boldsymbol{C_p}$ *bezeichnet einen* ***Kreis*** *der Ordnung p.*

Definition 6 *Für eine Menge von Knoten V' $\subseteq$ V bezeichnet* ***<V'>*** *den von V'* ***induzierten Teilgraphen*** *mit der Knotenmenge V' und den Kanten aus G, die nur mit Knoten aus V' inzidieren.*

Definition 7 *Eine Knotenmenge $S \subseteq V$ heißt* ***stabil*** *wenn <S> keine Kanten enthält. Die Mächtigkeit der größten stabilen Menge in G heißt* ***Stabilitätszahl*** *und wird bezeichnet mit* $\boldsymbol{\alpha(G)}$*.*

Definition 8 *Eine Knotenmenge $C \subseteq V$ heißt* ***Clique*** *wenn <C> vollständig ist. Die Mächtigkeit der größten Clique in G heißt* ***Cliquenzahl*** *und wird bezeichnet mit* $\boldsymbol{\omega(G)}$*.*

Definition 9 *Ein Graph G ist* ***bipartit****, wenn eine Partition von $V = V_1 \cup V_2$ existiert, sodass <V_1> und <V_2> keine Kanten enthalten.*

Definition 10 *Ein Graph G wird* ***split graph*** *genannt, wenn eine Partition von V = $S \cup C$ existiert, sodass S eine stabile Menge ist und <C> ein vollständiger Graph.*

Definition 11 *Eine* ***Knotenfärbung*** *ist eine Zuordnung von Farben zu Knoten, sodass adjazenten Knoten verschiedene Farben zugeordnet sind.*

Definition 12 *Ist ein Graph G* ***k-färbbar*** *aber nicht (k-1)-färbbar, so ist er* ***k-chromatisch*** *und* $\boldsymbol{\chi(G)}$ *= k ist die* ***chromatische Zahl*** *von G.*

Definition 13 *Sei G = (V, E) ein Graph mit Teilgraph H, V' $\subseteq$ V und E' $\subseteq$ E. Dann ist* ***G - V' = <V$\setminus$ V'>****,* ***G - E' = (V, E$\setminus$E')*** *und* ***G - H = (V, E$\setminus$E(H))****.*

Definition 14 *Ein* ***Matching*** *ist eine Menge $M \subseteq E$ von paarweise nichtadjazenten Kanten in G.*

Definition 15 *Das* ***Komplement*** $\overline{G}$ *eines Graphen G = (V, E) ist der Graph* $\overline{G}$ *= (V,* $\binom{V}{2}$ $\setminus$*E).*

Grenzen für die chromatische Zahl

Satz 1 *Eine untere Schranke für die chromatische Zahl* χ *ist gegeben durch* ω.

Satz 2 *Eine obere Schranke für die chromatische Zahl* χ *eines Graphen ist* $\Delta + 1$.

Theorem 1 (Brooks 1941) *Ist* G *ein zusammenhängender Graph mit* $G \ncong K_p$ *und* $G \ncong C_{2k+1}$, *so gilt* $\chi \leq \Delta$.

Theorem 2 *Sei* G *ein zusammenhängender Graph der Ordnung* p *mit der Cliquenzahl* ω *und der Stabilitätszahl* α. *Es gilt für die chromatische Zahl* $\chi(G) \leq \frac{p+\omega+1-\alpha}{2}$. *Es gilt insbesondere* $\chi(G) \leq \frac{p+\omega-\alpha}{2}$, *wenn entweder* $\omega + \alpha = p + 1$ *gilt und* G *kein split graph ist, oder* $\alpha + \omega = p - 1$ *gilt und* G *keinen induzierten* ($K_{\omega+3}$ - C_5) *enthält.*

Lemma 1 *Für einen* K_3*-freien Graphen* G *gilt* $\chi(G) \leq \lfloor \frac{p+4}{3} \rfloor$.

Bemerkung 1 *Die* ***Ramsey Zahl*** *(bezeichnet mit* ***R(r,s)****) gibt die Anzahl Knoten an, die ein Graph besitzen muss, um entweder eine Clique der Größe r oder eine stabile Menge der Größe s zu enthalten. Es gilt R(3,3) = 6.*

Theorem 3 *Sei* G *ein zusammenhängender Graph der Ordnung* p *mit der Cliquenzahl* ω, *der Stabilitätszahl* α, *dem Maximalgrad* Δ *und der chromatischen Zahl* χ. *Es gilt* $\chi \leq min\{\Delta + 1, \frac{p+\omega+1-\alpha}{2}\}$ *und insbesondere* $\chi \leq min\{\Delta, \frac{p+\omega-\alpha}{2}\}$ *wenn* G *kein ungerader Kreis und kein split graph ist und auch keinen induzierten* ($K_{\omega+3}$ - C_5) *enthält.*